|  |  |
| --- | --- |
| 结论三：函数的对称性 | |
| 结  论 | **已知函数f(x)是定义在R上的函数.**  **(1)若f(a+x)=f(b-x)恒成立,则y=f(x)的图象关于直线x=对称,特别地,若f(a+x)=f(a-x)恒成立,则y=f(x)的图象关于直线x=a对称;**  **(2)若f(a+x)+f(b-x)=c,则y=f(x)的图象关于点对称.特别地,若f(a+x)+f(a-x)=2b恒成立,则y=f(x)的图象关于点(a,b)对称.** |
| 解  读 | 有对称的定义可以说明这两个结论的成立。例如：如果函数y=f（x）满足f（a+x）=f（b-x），则y=f（x）图象关于x=对称，由于f（a+x）=f（b-x），两式中的变量到直线x=的距离相等并且函数值也相等，所以y=f（x）图象关于x=对称。 |
| 典  例 | 已知定义在*R*上的函数满足：  ①；②；③在上表达式为.则函数与函数的图像在区间[－3，3]上的交点个数为\_\_\_\_\_. |
| 解  析 | 【答案】5  【分析】先根据①②可知函数的对称中心和对称轴，再分别画出和的部分图像，由图像观察交点的个数．  【详解】根据题意，①，得函数的图像关于点对称，  ②，得函数的图像关于对称，则函数与在区间上的图像如图所示，  figure  由图可知与的图像在上有5个交点． |
| 反  思 | 本题考查函数的对称性，利用函数的图像求函数的交点个数，函数对称性常用的结论：函数若满足则函数图像关于点对称，若函数满足则函数图像关于对称. |
| 针对训练\*举一反三 | |
| 1．已知是定义在上的奇函数，且，当时，，则（ ）  A． B． C． D．  【答案】A  【分析】  根据函数的奇偶性，对称性判断函数的周期并求解.  【详解】因为是定义在上的奇函数，所以图象的对称中心为，且．  因为，所以图象的对称轴方程为，故的周期，  ，，从而，  2．定义在上的偶函数满足，当时，，设函数（为自然对数的底数），则与的图象所有交点的横坐标之和为（ ）  A．5 B．6 C．7 D．8  【答案】D  【分析】  根据已知条件求出的周期，利用周期性和偶函数作出在区间的图象，以及的图象，数形结合即可求解.  【详解】因为满足，所以图象关于直线对称，因为是上的偶函数，所以图象关于直线对称，所以的周期为，的图象关于直线对称，由时，，作出图象如图和的图象  figure  由图知与的图象在区间有四个交点，设交点横坐标分别为，且，，所以，所以与的图象所有交点的横坐标之和为，  3．定义在上的函数满足，且当时，若对任意的，不等式恒成立，则实数的最大值为（ ）  A． B． C． D．  【答案】C  【分析】  若对任意的，不等式恒成立，即对，不等式恒成立，，进而可得答案.  【详解】当时，单调递减，，当时，单调递减，，故在上单调递减，由，得的对称轴为，  若对任意的，不等式恒成立，即对，不等式恒成立，，即，即，  ，故实数的最大值为.  4．已知是定义域为的奇函数，，当时，，则时，的解析式为（ ）  A． B．  C． D．  【答案】A  【分析】  由，得对称轴方程为，根据奇偶性得时， ，再设时，可得答案.  【详解】是定义域为的，所以，因为，所以的一条对称轴方程为，当时，，所以当时，，，所以，则时，，  所以，即.  5．已知函数与函数的图象交点分别为：，…，，则（ ）  A． B． C． D．  【答案】D  【分析】  先证明函数关于点对称，再作出两函数的图象分析得解.  【详解】由题意化简，，因为函数是奇函数，所以函数关于点对称.因为函数是奇函数，所以函数关于点对称.  又，所以在上单调递减，由题得，所以函数在上单调递减，在上单调递增，由图象可知，与的图象有四个交点，且都关于点对称，所以，所以所求和为  figure  6．已知函数满足对任意的都有成立，则  ＝ ．  【答案】7  【解析】设figure，则figure，因为，所以figure，  figure,故答案为7.  7．已知函数，则使不等式成立的实数*t*的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.  【答案】  【分析】  由函数解析式知函数的图象关于直线对称，利用定义证得时，函数是减函数，时，函数为增函数，利用对称性和单调性解不等式即可.  【详解】，，，所以的图象关于直线对称，时，，设，则，，，，  所以，即，即是减函数，所以时，函数为增函数，因此由得，解得且． | |

****